# Využití bodových symetrií při řešení ODR

- znalost Lieovy grupy transformací, vůči které je invariantní obyčejná diferenciální rovnice (ODR), kterou máme vyřešit, nám často může pomoci
- konkrétně jednoparam. LGT, která není tzv. triviální symetrií (viz později), umožňuje buď snížit řád ODR o jedna, nebo rovnici 1. řádu vyřešit, tj. převést na integraci
- pokud známe r-param. LGT, vůči níž je zadaná ODR invariantní, mělo by jít v principu snížit řád o r stupňů, ale nelze to udělat postupně, to lze pouze pro tzv. řešitelné LGT
- základní trik:
  - převést ODR do jiných (vhodnějších) **proměnných** buď pomocí kanonických proměnných bodové symetrie nebo pomocí metody diferenciálních invariantů
- obě tyto metody jsou založeny na nalezení řešení parciálních diferenciálních rovnic (PDR) prvního řádu typu

$$Xr(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

nebo

$$Xs(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

- rovnice tohoto typu lze občas řešit pomocí metody charakteristik, kterou zde stručně shrneme.

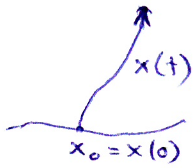
(podrobnosti viz např. L.C. Evans: Partial Differential Equations) kap. 3

pro speciální případ

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i} = c(x,u)$$

pro neznámou skalární funkci $u = u(x)$

- metoda spočívá v hledání řešení podél tzv. charakteristiky, která vychází z určitého bodu $x_0$, kde je zadaná počáteční hodnota
- rovnice této charakteristiky jsou dány




$$\frac{dx^i(t)}{dt} = b^i(x(t)) \quad \text{pro } i=1,\dots,n \quad , \; x(0)=x_0$$

a řešení podél ní je dáno rovnicí

$$\frac{du(t)}{dt} = c(x(t),u(t)) \quad , \quad u(0)=u(x_0)$$

- rovnice charakteristiky lze též psát jako

$$\frac{dx^1}{b^1(x)} = \frac{dx^2}{b^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{b^n(x)}$$

jde o $n-1$ rovnic, jejichž řešení závisí na $n-1$ integračních konstantách. Lze ukázat, že těchto $n-1$ „konstant", zapsaných ovšem jako funkce $x$, dávají $n-1$ nezávislých řešení $r_j(x)$ rovnice (*) pro $c(x,u)=0$ (tedy bez pravé strany)

tj. $$\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial r_j(x)}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{pro } j=1,\dots,n-1$$

(v tomto případě je totiž $\frac{du(t)}{dt}=0$ a tedy $u(t) = \text{konst} = u(x_0)$ podél charakteristiky)

- pokud $c(x,u) \neq 0$, pak pokud je $s(x)$ řešením, bude obecným řešením $s(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j r_j(x)$ a záleží pak na počátečních podmínkách
- pokud $c(x,u)=1$, pak lze položit

$$dt = \frac{ds}{1} = \frac{dx^i}{b^i(x)} \quad \text{pro určité } i \text{ a vyintegrovat}$$

• podrobnější příklad na použití této metody bude uveden níže při hledání kanonických proměnných

# Kanonické proměnné a jejich využití

- uvažujme nejprve obecnou změnu proměnných ODR, tj. přechod od $(x,y)$ k $(r,s)$, a uvažujme dále, že máme dán infinitezimální operátor $X$ v proměnných $(x,y)$ tj.

$$X^{(x,y)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

- v nových proměnných bude tento operátor dán jako

$$X^{(r,s)} = \alpha(r,s)\frac{\partial}{\partial r} + \beta(r,s)\frac{\partial}{\partial s}$$

- Jak $\alpha(r,s)$ a $\beta(r,s)$ souvisí s $\xi$ a $\eta$, pokud $r=r(x,y)$ a $s=s(x,y)$ ?
  - uvažujme funkci $F(r,s)$ a zapůsobme

$$X^{(r,s)}F(r,s) = \alpha(r,s)\frac{\partial F}{\partial r} + \beta(r,s)\frac{\partial F}{\partial s} \qquad (1)$$

na druhou stranu můžeme tuto funkci uvažovat jako funkci proměnných $(x,y)$, neboli $F(r,s) = F(r(x,y),s(x,y))$ a zapůsobit $X^{(x,y)}$, dostaneme

$$X^{(x,y)}F(r(x,y),s(x,y)) = \xi(x,y)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \eta(x,y)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

$$= X^{(x,y)}r(x,y)\frac{\partial F}{\partial r} + X^{(x,y)}s(x,y)\frac{\partial F}{\partial s} \qquad (2)$$

- porovnáním výrazů (1) a (2) vidíme, že

$$\alpha(r(x,y),s(x,y)) = X^{(x,y)}r(x,y)$$
$$\beta(r(x,y),s(x,y)) = X^{(x,y)}s(x,y)$$

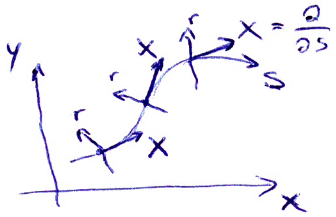
nebo též můžeme psát, že

$$\boxed{\alpha(r,s) = X^{(x,y)}r(x,y)\Big|_{\substack{x=x(r,s)\\ y=y(r,s)}} \quad \text{a} \quad \beta(r,s) = X^{(x,y)}s(x,y)\Big|_{\substack{x=x(r,s)\\ y=y(r,s)}}}$$

- kanonické proměnné jsou takové proměnné $r(x,y)$ a $s(x,y)$, pro které je infinitezimální operátor generátorem translace v jedné proměnné, např. v $s$, tj. $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ tj. $\alpha=0$ a $\beta=1$ a jsou tedy dány rovnicemi

$$\boxed{X^{(x,y)}r(x,y) = 0 \quad \text{a} \quad X^{(x,y)}s(x,y) = 1}$$

- jde vlastně o „přirozené" proměnné pro bodovou symetrii gen. $X^{(x,y)}$




Př.: hledejme kanonické proměnné pro infinit. operátor rotace v rovině $(x,y)$ daný jako $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

Řešme nejprve

$$X\, r(x,y) = 0 \quad \text{neboli} \quad -y\frac{\partial r}{\partial x} + x\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

metoda charakteristik dává rovnice

(3) $$\frac{dx(t)}{dt} = -y(t)\,, \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad \text{a} \quad \frac{dz(t)}{dt} = 0 \quad \text{kde } z(t) = r(x(t),y(t))$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x_0\,, y(0) = y_0$ a $z(0) = g(x_0,y_0)$
je hodnota $r$ v bodě $(x_0,y_0)$

protože při hledání kanonických proměnných neznáme určené kde charakteristika začíná a jaká je hodnota podél určité charakteristiky, můžeme volit jednodušší poč. podmínky např. volbou, že charakteristiky budou začínat v lib. bodě podél polopřímky $x_0>0\,, y_0=0$ (v tomto případě to funguje, ale někdy je nutno volit jiný počáteční bod) a hodnota $z(t=0)$ bude dána jako jistá funkce $g(x_0)$

Řešení (3) pak je $\begin{array}{l} x(t) = x_0 \cos t \\ y(t) = x_0 \sin t \end{array}$ a $z(t) = g(x_0)$

Zvolíme-li nyní jistý bod $(x,y)$, pak tomuto bodu bude odpovídat jisté $x_0$ a $t$ dané jako $x_0 = \sqrt{x^2+y^2}\,, t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
a tedy řešení $Xr=0$ lze psát jako $r(x,y) = r(x(t),y(t)) =$
$= z(t) = g(x_0) = g(\sqrt{x^2+y^2})$

tj. může to být libovolná funkce výrazu $\sqrt{x^2+y^2}$

standardní volbou je samozřejmě přímo $r = \sqrt{x^2+y^2}$

kanonické proměnné

Druhá kanonická proměnná $s(x,y)$ je dána rovnicí
$$Xs(x,y) = -y\frac{\partial s}{\partial x} + x\frac{\partial s}{\partial y} = 1$$
Rovnice charakteristik jsou stejné, jen nyní bude $\frac{dz(t)}{dt} = 1$, kde nyní $z(t) = s(x(t), y(t))$

s poč. podmínkou $z(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opět libovolná funkce}}}{g}(x_0)$

Řešení nyní je ($x(t)$ a $y(t)$ jsou stejné jako u $r(x,y)$)
$$z(t) = g(x_0) + t$$
a tedy v bodě $(x,y)$ bude obecné řešení
$$s(x,y) = g(x_0) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \underbrace{g(\sqrt{x^2+y^2})}_{\substack{\text{obecné} \\ \text{řešení } Xr=0}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}_{\substack{\text{partikulární řešení} \\ Xs=1}}$$
Obvyklá volba kanonické proměnné $s(x,y)$ je
$$s(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$$
Tj. kanonickými proměnnými pro rotace v rovině jsou polární souřadnice $(r, \varphi)$

Totéž bychom dostali řešením alternativní rovnice charakteristiky
$$dt = \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x\,dx = -y\,dy \Rightarrow x^2 = -y^2 + 2C$$
kde $C$ je libovolná integrační konstanta, kterou můžeme zapsat jako libovolnou funkci, např. volbou $C = \frac{r^2}{2}$ dostaneme $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (podstatná je kombinace $x^2+y^2$)

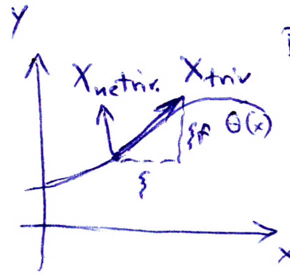
Pro $s(x,y)$ je alternativní rovnice např.
$$dt = \frac{ds}{1} = \frac{dy}{x}, \text{ kde } x \text{ je dáno podél charakteristiky}$$
jako $x = \sqrt{r^2-y^2}$ a tedy
$$ds = \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \Rightarrow s = \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}} + \cancel{g(x_0)} = \varphi + \varphi_0$$
obvykle volíme $\varphi_0 = 0$.

# Použití kanonických proměnných k řešení ODR 1. řádu

- mějme ODR 1. řádu
$$y_1 = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$
a 1-par. LGT generovanou
$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$
vůči níž je rovnice (1) invariantní.

- bodová symetrie generovaná $X$ nám může pomoci při hledání řešení (1) pokud

a) jde o <u>netriviální bod. symetrii</u>, tj.
pokud bude $\eta(x,y) \neq \xi(x,y) f(x,y)$
(nebo obecněji $\eta(x,\theta(x)) \neq \xi(x,\theta(x))\,\theta'(x)$, kde $\theta(x)$ je řešení příslušné ODR, kterou se snažíme řešit)




Pokud totiž $\eta(x,y) = \xi(x,y) f(x,y)$, jde o triviální symetrii, neboť pak infinit. kritérium
$$X^{(1)}\left(y_1 - f(x,y)\right)\Big|_{y_1=f} = 0$$
je splněno pro lib. $\xi(x,y)$. Vyzkoušejte si to :-)
$\left(\eta^{(1)} = \xi(x,y) D_x f + (D_x \xi)(f - y_1)\right)$
Geometricky to znamená, že
$X$ směřuje podél řešení $y = \theta(x)$ a převádí řešení na stejné řešení.

b) <u>umíme najít kanonické proměnné snáze</u>, než vyřešit rovnici $y_1 = f(x,y)$, tj. buď proměnné uhodneme, nebo je řešení rovnic charakteristik pro $Xr = 0$ a $Xs = 1$
tj. $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{ds}{1}$ snadné.

Pozn: 1) všimněte si, že pokud máme triviální symetrii, bude rce charakt. $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\xi f}$ neboli $\frac{dy}{dx} = f$, tj. nepomůžeme si

2) lze ukázat, že pro ODR 1. řádu vždy existuje netriviální bod. symetrie, ale je obecně obtížné ji najít, pokud ji nelze uhodnout (hledání symetrií je obtížnější než rovnici vyřešit)

Př. mějme ODR $y_1 = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, kde $f$ je libovolná funkce

„vidíme", že tato rovnice je invariantní vůči škálování

$$\tilde{x} = \alpha x \qquad \text{s generátorem} \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad (*)$$
$$\tilde{y} = \alpha y$$

(ověřte si to i přes infinitezimální kritérium)

kanonické proměnné jsou dané rovnicemi

naše volba „konst"

$$X r(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y - \ln r \Rightarrow r = \frac{y}{x}$$

$$X s(x,y) = 1 \Rightarrow \frac{ds}{1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow s = \ln y$$

naše volba, mohli jsme použít i $\frac{ds}{1} = \frac{dx}{x}$
a tedy mít $s = \ln x$ a dostali bychom
níže jinou funkci $G(r)$, ale stejné řešení $y(x)$

abychom převedli $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ do kanonických proměnných,
vyjádříme $y = e^s$ a $x = \frac{e^s}{r}$ a spočteme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_r(e^s)}{D_r\left(\frac{e^s}{r}\right)} = \frac{\frac{ds}{dr}e^s}{\frac{ds}{dr}\frac{e^s}{r} - \frac{e^s}{r^2}} = \frac{r^2\frac{ds}{dr}}{r\frac{ds}{dr} - 1} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(r)$$

dosadíme z rovnice $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$

a tedy dostáváme rovnici

$$\frac{ds}{dr} = \frac{f(r)}{f(r)r - r^2} = G(r)$$

což bychom měli očekávat, neboť je-li $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ invariantní vůči $(*)$, pak nová rovnice v $(r,s)$ musí být invariantní vůči $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ a tedy explicitně nezávislá na $s$.

Řešení původní rovnice je tak dáno implicitně pomocí integrace této rovnice

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} G(r')\,dr' + C$$

Speciálně pro $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ bude $G(r) = \frac{r}{r^2 - r^2}$ a nelze integrovat.

Důvod je, že v tomto případě jde o triviální bod. symetrii
neboť $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} = f$, ovšem v tomto případě lze přímo integrovat původní rovnici

Pokud $f\left(\frac{y}{x}\right) \neq \frac{y}{x}$, dostaneme tímto postupem řešení, umíme-li zintegrovat $G(r)$ a pak vyjádřit $y = y(x)$

Např. pro $f(x) = \frac{x}{y}$ bude $f(r) = \frac{1}{r}$,

$$G(r) = \frac{1}{r(1-r^2)} \quad \text{a tedy} \quad \ln y = s = \ln r - \frac{1}{2}\ln(r^2-1) + \ln C$$

z čehož lze vyjádřit $\quad y = \pm\sqrt{x^2+c^2}$

Ovšem pro $f(x) = \frac{x}{x-y} = \frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ bude $G(r) = \frac{1}{r-r^2+r^3}$

a dostaneme implicitní rovnici

$$\ln y = s = -\frac{1}{2}\ln(r^2-r+1) + \ln r + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2r-1}{\sqrt{3}} + c$$

ze které $y = y(x)$ nelze vyjádřit (porovnejte s řešením, které vrátí Mathematica)

## Určení ODR 1. řádu invariantní vůči zadané bod. symetrii

- chceme nalézt ODR $y_1 = f(x,y)$ invariantní vůči bod. symetrii generované $X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$
- přestože bychom mohli přímo řešit rovnici pro $f(x,y)$ kterou bychom získali z infinit. kritéria $X^{(1)}(y_1 - f(x,y))\Big|_{y_1=f} = 0$ je mnohdy jednodušší najít nejprve kanonické proměnné $(r,s)$ pomocí $Xr = 0$ a $Xs = 1$. V nich je pak nejobecnější ODR 1. řádu inv. vůči $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ dána jednoduše jako $\frac{ds}{dr} = G(r)$, kde $G$ je lib. funkce

a pak najít $y_1 = f(x,y)$ z $\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s(x,y)}{D_x r(x,y)} = G(r(x,y))$

Př. pro $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ bychom samozřejmě dostali $r = \frac{y}{x}$, $s = \ln y$

a tedy $\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{y_1}{y}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{y_1}{x}} = \frac{y_1}{ry_1 - r^2} = G(r) \Rightarrow y_1 = \frac{r^2 G(r)}{rG(r)-1} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

což je tedy nejobecnější ODR 1. řádu inv. vůči škálování $\begin{matrix}\tilde{x} = \alpha x \\ \tilde{y} = \alpha y\end{matrix}$.

# Snížení řádu ODR pomocí kanonických proměnných

- máme-li ODR vyššího řádu

$$\frac{d^k y}{dx^k} = y_k = f(x, y, y_1 \dots y_{k-1}) \qquad (*)$$

invariantní vůči bod. symetrii generované $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$,

která je netriviální, tj. $\frac{\eta}{\xi} \neq \theta'(x)$, kde $\theta(x)$ je řešení $(*)$,

pak přechodem ke kanonickým proměnným $(r, s)$

dostaneme rovnici

$$\frac{d^k s}{dr^k} = G\left(r, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1} s}{dr^{k-1}}\right)$$

kde $G$ nezávisí explicitně na $s$, neboť musí být inv. vůči $X = \frac{\partial}{\partial s}$.

a tedy substitucí $z = \frac{ds}{dr}$ dostaneme rovnici o stupeň nižší

$$\frac{d^{k-1} z}{dr^{k-1}} = G\left(r, z, \frac{dz}{dr}, \dots \frac{d^{k-2} z}{dr^{k-2}}\right)$$

a najdeme-li její řešení $z = \phi(r)$, pak řešení původní rovnice (1) je implicitně dáno pomocí

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} \phi(r')\, dr' + C$$

Př. uvažujme lineární homogenní ODR 2. řádu

$$y_2 + p(x)\, y_1 + q(x)\, y = 0$$

která je invariantní vůči škálování závislé proměnné,

tj. vůči transf. $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = \alpha y$ generované $X = y \frac{\partial}{\partial y}$

kanonické proměnné jsou např. $r = x$, $s = \ln y$

neboli $x = r$, $y = e^s$ a tedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_r y(r,s)}{D_r x(r,s)} = e^s \frac{ds}{dr}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{D_r\left(e^s \frac{ds}{dr}\right)}{D_r x} = e^s\left[\frac{d^2 s}{dr^2} + \left(\frac{ds}{dr}\right)^2\right]$$

Dostaneme tak rovnici

$$e^s\left[\frac{d^2 s}{dr^2} + \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + p(r)\frac{ds}{dr} + q(r)\right] = 0$$

zavedení proměnné $z = \frac{ds}{dr} = \frac{y_1}{y}$ (tzv. Riccatiho transformace)

nakonec máme rovnici Riccatiho typu, která je sice o řád nižší, ale nelineární

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + p(r)z + q(r) = 0$$

speciálně pro lin. harmonický oscilátor $y_2 + \omega^2 y = 0$

je $p(x) = 0$, $q(x) = \omega^2$ a tedy

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + \omega^2 = 0$$

(Pozn: jde o rovnici inv. vůči transl. v $r$ čili v $x$)

kterou lze přímo integrovat a řešení je

$$\frac{ds}{dr} = z(r) = -\omega \,\mathrm{tg}\, \omega(r - c_1)$$

a druhou integrací

$$\ln y = s(r) = \ln \cos \omega(r - c_1) + \ln A$$

neboli $$y = A \cos \omega(x - c_1)$$ , jak bychom očekávali.

Pozn.: 1) není náhodou, že lin. harm. oscilátor bylo možné vyintegrovat úplně, neboť rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ je inv. vůči 2-par. LGT s generátory $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ a $X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$ která je řešitelná (viz níže), neboť $[X_1, X_2] = 0$.

2) Při řešení $y_2 + \omega^2 y = 0$ jsme mohli začít i s $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$.

kanonické prom. jsou $r = y$, $s = x$

a dostali bychom $$\frac{d^2 s}{dr^2} = \omega^2 r \left(\frac{ds}{dr}\right)^3$$ (ověřte!)

neboli $$\frac{dz}{dr} = \omega^2 r z^3$$

(Pozn. jde o rovnici inv. vůči škálování $\tilde{z} = \frac{1}{\alpha} z$, $\tilde{r} = \alpha r$ což odpovídá škálování $\tilde{y} = \alpha y$)

a postupnou integrací bychom opět dostali

řešení $y = A \sin \omega(x - c)$ (vyzkoušejte si to)

# Určení ODR vyššího řádu invariantní vůči zadané grupě symetrií

- máme-li víceparam. grupu bod. symetrií a hledáme-li ODR inv. vůči této grupě, aplikujeme postupně pomocí infinit. kritéria všechny infin. operátory (lin. nezávislé) tj. hledáme $y_k = f(x, y, y_1 \dots y_{k-1})$ a pro všechny $X_j$, $j = 1, \dots, r$ musí platit
$$X_j^{(k)} (y_k - f)\Big|_{y_k = f} = 0$$

- pro jednoparam. grupu nebo při aplikaci konktrétního $X_j$ můžeme též využít kanonické proměnné $(r, s)$, neboť pak je $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ a obecná ODR k-tého řádu inv. vůči translaci v $s$ bude
$$\frac{d^k s}{dr^k} = G\left(r, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1} s}{dr^{k-1}}\right)$$
a tuto rovnici pak převedeme do $(x, y)$

Př. hledejme ODR 2. řádu invariantní při Galileově transformaci generované $X = x \frac{\partial}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $X^{(2)} = x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_1}$ (ověřte)

obecnou rovnici zapíšeme jako $y_2 = f(x, y, y_1)$

a) řešení pomocí kanonických proměnných

$$\left.\begin{array}{l} Xr = 0 \Rightarrow r = x \\ Xs = 1 \Rightarrow s = \frac{y}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ds}{dr} = \frac{x y_1 - y}{x^2}, \quad \frac{d^2 s}{dr^2} = \frac{-2(x y_1 - y)}{x^3} + \frac{y_2}{x}$$

Dosazením do $\frac{d^2 s}{dr^2} = G\left(r, \frac{ds}{dr}\right)$ a úpravou dostaneme

$$y_2 = x \underset{\uparrow \text{lib. fce}}{G}\left(x, \frac{x y_1 - y}{x}\right) + 2 \frac{x y_1 - y}{x^2} = \underset{\uparrow \text{nebo zde lib. fce}}{H}(x, x y_1 - y)$$

b) pomocí infinit. kritéria bychom dostali

$$X^{(2)} (y_2 - f(x, y, y_1))\Big|_{y_2 = f} = -x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

lze řešit metodou charakteristik $\Rightarrow$ 2 nezávislá řešení $f_1 = x$, $f_2 = x y_1 - y$

obecná $f(x, y, y_1)$ pak může být lib. fcí těchto dvou nezávislých řešení a tedy dostáváme totéž jako pomocí kanonických proměnných